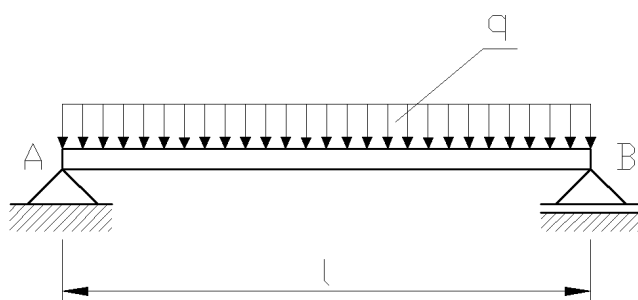


1. Wstęp teoretyczny

Modelowanie belek podpartych o różnorodnych schematach obciążeń jest jednym z kluczowych zagadnień Mechaniki. Mianem belki określa się zginany pręt. Jest on zazwyczaj umieszczony na dwóch lub kilku podporach. Celem analizy tego zagadnienia jest zbadanie wpływu obciążenia zewnętrznego na wartości sił reakcji w podporach, wielkość momentów gnących w belce oraz sił tnących.

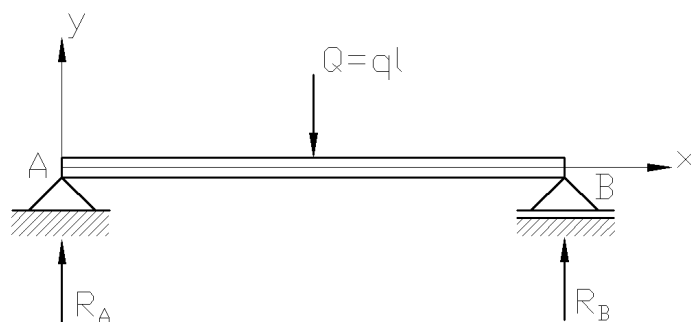
2. Analityczne rozwiązanie problemu

W celu zrozumienia zagadnienia modelowania belki wolnopodpartej, należy przeanalizować następujący przypadek – dla belki wolnopodpartej o długości l , obciążonej obciążeniem ciągłym o wartości q na całej długości (rysunek 1), należy sporządzić wykresy sił tnących oraz momentów gnących.



Rys. 1. Rozpatrywana belka

Rozwiązując dane zagadnienie, początkowo wyznacza się reakcje R_A i R_B występujące w podporach. W tym celu obciążenie ciągłe q zastępuje się siłą skupioną $Q = ql$ (rysunek 2). Reakcja w podporze A nie wymaga rozłożenia na składowe, gdyż w osi x nie działają żadne siły.



Rys. 2. Schemat obciążenia belki

Ponieważ układ jest statycznie wyznaczalny, reakcje R_A i R_B wyznacza się korzystając z warunków równowagi. Zapisuje się zatem sumy rzutów sił występujących w układzie na poszczególne osie, a także sumę momentów względem podpory A. Zakłada się, że siły zwrócone zgodnie z kierunkiem osi, a także momenty działające zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, będą posiadały wartości dodatnie. Suma rzutów sił na oś x :

$$\sum P_{ix} = 0,$$

gdzie: $\sum P_{ix}$ – suma sił działających w osi x , [N].



Suma rzutów sił na oś y :

$$\sum P_{iy} = R_A + R_B - Q = 0,$$

gdzie: $\sum P_{iy}$ – suma sił działających w osi y , [N],

R_A – reakcja z podporze A, [N],

R_B – reakcja z podporze B, [N],

Q – siła skupiona o wartość ql , [N].

Suma momentów względem podpory A:

$$\sum M_{iA} = Q \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot l = 0,$$

gdzie: $\sum M_{iA}$ – suma momentów względem podpory A, [Nmm],

Q – siła skupiona o wartość ql , [N],

R_B – reakcja z podporze B, [N],

l – długość belki, [mm].

Mając zdefiniowane poszczególne sumy, wyznacza się reakcję R_B :

$$R_B \cdot l = Q \cdot \frac{l}{2},$$
$$R_B = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2},$$

gdzie: R_B – reakcja z podporze B, [N],

Q – siła skupiona o wartość ql , [N],

q – obciążenie ciągłe, [N/mm],

l – długość belki, [mm].

Tworząc układ równań wyznacza się reakcję w podporze A:

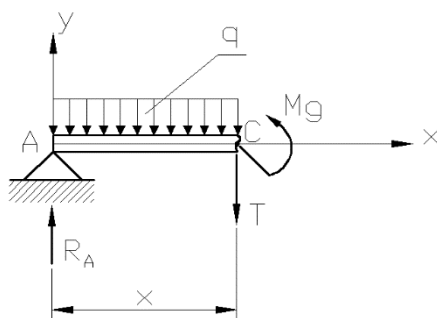
$$\begin{cases} R_B = \frac{ql}{2} \\ R_A + R_B = Q \end{cases},$$
$$\begin{cases} R_B = \frac{ql}{2} \\ R_A = Q - R_B = Q - \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2} \end{cases},$$

zatem reakcje w podporach wynoszą:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2},$$

gdzie: R_A – reakcja w podporze A, [N],
 R_B – reakcja w podporze B, [N],
 Q – siła skupiona o wartość ql , [N],
 q – obciążenie ciągłe, [N/mm],
 l – długość belki, [mm].

Wyznaczając siły tnące oraz momenty gnące w belce, w dowolnym przekroju znajdującym się w odległości x od podpory A, odrzuca się prawą część belki zastępując jej oddziaływanie na lewą część siłą tnącą T oraz momentem gnącym M_g , które zaczepione są w miejscu wykonania przekroju – punkcie C (rysunek 3).



Rys. 3. Siła tnąca T i moment gnący M_g występujące w przekroju belki oddalonym o x od podpory A

Następnie wyznacza się wartość siły tnącej T korzystając, podobnie jak podczas wyznaczania reakcji w podporach, z warunków równowagi:

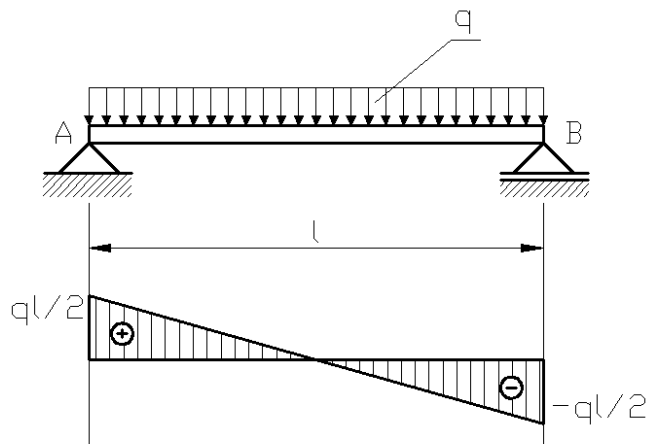
$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= 0, \\ \sum P_{iy} &= R_A - qx - T = 0,\end{aligned}$$

stąd:

$$\begin{aligned}T(x) &= R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx, \\ T(0) &= \frac{ql}{2}, \\ T\left(\frac{l}{2}\right) &= 0, \\ T(l) &= -\frac{ql}{2},\end{aligned}$$

gdzie: $\sum P_{ix}$ – suma sił działających w osi x , [N],
 $\sum P_{iy}$ – suma sił działających w osi y , [N],
 x – odległość od podpory A, [mm],
 q – obciążenie ciągłe, [N/mm],
 l – długość belki, [mm],
 T – siła tnąca, [N].

Zatem wykres sił tnących w belce będzie następujący (rysunek 4):



Rys. 4. Wykres sił tnących

Wartość momentu gnącego M_g określa się również z warunku równowagi, definiując sumę momentów względem punktu C:

$$\sum M_{iC} = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M_g = 0,$$

stąd:

$$M_g(x) = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx}{2} \cdot x,$$

$$M_g(0) = M_g(l) = 0,$$

$$M_g\left(\frac{l}{2}\right) = M_{g_{\max}} = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8},$$

gdzie: $\sum M_{iC}$ – suma momentów względem punktu C, [Nmm],

R_A – reakcja z podporze A, [N],

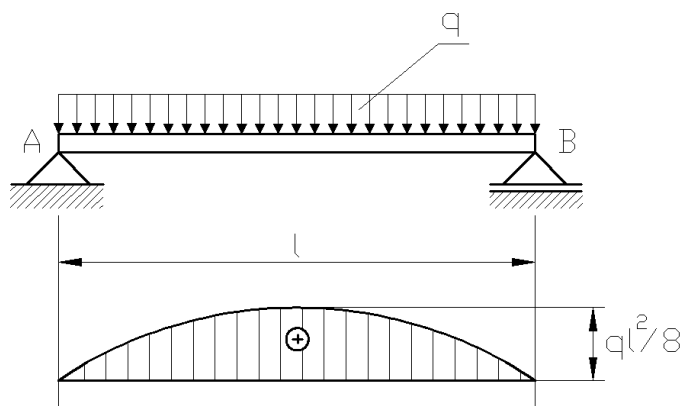
x – odległość od podpory A, [mm],

q – obciążenie ciągłe, [N/mm],

l – długość belki, [mm],

M_g – moment gnący, [Nmm].

Zatem wykres momentów gnących występujących w belce będzie następujący (rysunek 5):



Rys. 5. Wykres momentów gnących



3. Przykład zadania

Przykładowe obliczenia dla długości belki $l = 4 \text{ m} = 4000 \text{ mm}$ oraz obciążenia ciągłego $q = 1,5 \text{ N/mm}$ powyższego przykładu przedstawiają się następująco:

Reakcje w podporach:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2} = \frac{1,5 \cdot 4000}{2} = 3000 \text{ [N]}$$

Wartości siły tnącej:

$$T(0) = \frac{ql}{2} = \frac{1,5 \cdot 4000}{2} = 3000 \text{ [N]}$$

$$T\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \text{ N}$$

$$T(l) = -\frac{ql}{2} = -\frac{1,5 \cdot 4000}{2} = -3000 \text{ [N]}$$

Wartości momentu gnącego:

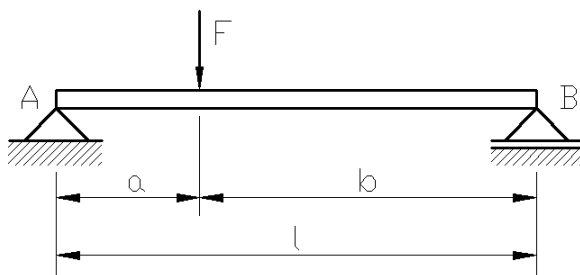
$$M_g(0) = 0 \text{ [N]}$$

$$M_g\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8} = \frac{1,5 \cdot 4000^2}{8} = 3000000 \text{ [Nmm]} = 3000 \text{ [Nm]}$$

$$M_g(l) = 0 \text{ [N]}$$

Zadania do samodzielnego wykonania

Wykonać program wyznaczający wartość reakcji w podporach, wielkość siły tnącej oraz momentu gnącego belki wolnopodpartej o schemacie obciążenia przedstawionym na rysunku 6. Model matematyczny niezbędny do opracowania programu znajduje się poniżej. Sprawdzić działanie programu dla danych $a = 1000$ mm, $b = 2000$ mm, $F = 5$ N.



Rys. 6. Schemat obciążenia analizowanej belki

Reakcje w podporach:

$$R_A = F \frac{b}{a+b}; \quad R_B = F \frac{a}{a+b}$$

Wartości siły tnącej:

– dla $0 \leq x_1 \leq a$

$$T(x_1) = F \frac{b}{a+b}$$

– dla $a \leq x_2 \leq a+b$

$$T(x_2) = -F \frac{a}{a+b}$$

Wartości momentu gnącego:

– dla $0 \leq x_1 \leq a$

$$M_g(x_1) = F \frac{b}{a+b} x_1$$

– dla $a \leq x_2 \leq l$

$$M_g(x_2) = F \frac{b}{a+b} (x_2 - a) - F(x_2 - a)$$