



Nr ćwiczenia:	9
Tytuł ćwiczenia:	<i>Różniczkowanie numeryczne.</i>
Nazwa przedmiotu:	Podstawy Metod Obliczeniowych
Kierunek studiów:	Robotyzacja Procesów Wytwórczych – I stopień

1. Cel ćwiczenia:

- zdobycie umiejętności realizacji numerycznego obliczania pochodnych,
- praktyczne wykorzystanie poznanych elementów środowiska Matlab.

2. Urządzenia i oprogramowanie niezbędne do realizacji ćwiczenia:

- stanowisko komputerowe z oprogramowaniem Matlab i dostępem do Internetu.

3. Przebieg ćwiczenia:

1. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia.
2. Samodzielne rozwiązywanie zadań.
3. Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadań.

4. Literatura:

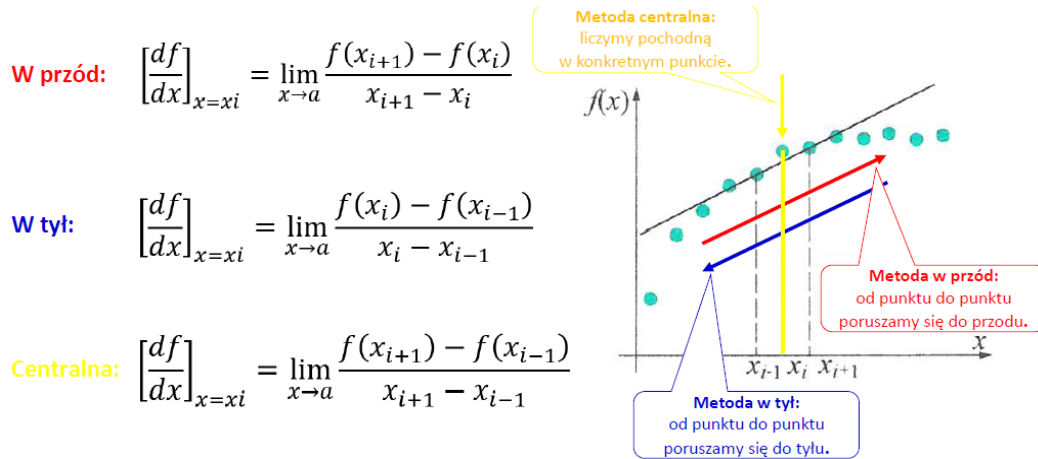
1. Klempka R., Świątek B., Garbacz-Klempka A.: *Programowanie, algorytmy numeryczne i modelowanie w Matlabie*. Wyd. AGH, 2017.
2. Magrab E. B., Azarm S., Balachandran B., Duncan J., Herold K., Walsh G.: *Engineers Guide to MATLAB*. Pearson, 2011.
3. Pratap R.: *Matlab 7 dla naukowców i inżynierów*. Wyd. Naukowe PWN, 2006.
4. Kamińska A., Pińczyk B.: *Ćwiczenia z Matlab. Przykłady i zadania*. Wyd. MIKOM, 2002.

1. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia.

Szereg poznanych na poprzednich zajęciach poleceń oraz elementów pakietu Matlab znajduje zastosowanie w procesie implementacji wielu metod numerycznych. Jednym z podstawnych zagadnień tego obszaru wiedzy jest numeryczne wyznaczanie pochodnych, czyli różniczkowanie numeryczne.

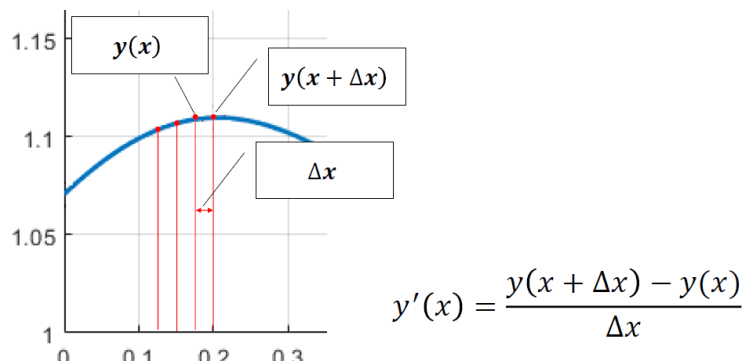
2. Metody wyznaczania pochodnych.

Numeryczne wyznaczanie pochodnych można realizować na różne sposoby. Do najczęściej stosowanych metod zalicza się metodę różnic skończonych. W ramach tej metody wyróżniamy 3 sposoby wyznaczania różnicy: w przód, w tył oraz różnicy centralnej. Idea oraz niezbędne wzory zostały przedstawione na rys. 1.



Rys. 1. Idea metody różnic skończonych.

W celu przystępnej implementacji teź metody musimy dokonać pewnego uproszczenia. Na rys. 2 została przedstawiona bardziej przejrzysta i łatwiejsza w implementacji wersja metody różnicy w przód.



Rys. 2. Wyznaczanie pochodnej metodą różnicy w przód.

3. Wyznaczanie pochodnej w środowisku Matlab.

Pojawia się zatem pytanie – w jaki sposób zrealizować numeryczne wyznaczanie pochodnej w środowisku Matlab? W celu zrozumienia tego zagadnienia – przeanalizujemy pewien przykład:

Należy wyznaczyć przebieg pochodnej funkcji $y = \ln(x) \cdot (\sin^2(x) + 1)$, gdzie $x \in \langle 0, 5; 3 \rangle$.

Algorytm wyznaczenia pochodnej numerycznie będzie następujący:

1. Definiujemy krok Δx (zobacz – rys. 2) z jakim będziemy wyznaczać pochodną – jego wartość będzie przechowywana w zmiennej dx .
2. Z wykorzystaniem kroku dx generujemy wektor x w wymaganym zakresie.
3. Obliczamy wartości funkcji y .
4. Za pomocą zmiennej N określamy ile razy należy obliczyć daną pochodną – zazwyczaj będzie to tyle razy, ile elementów zawiera wektor x .
5. Z wykorzystaniem pętli implementujemy odpowiedni wzór metody różnic skończonych i wyznaczamy wartości pochodnej, przechowując je w nowej w zmiennej fp . W pętli musimy odnosić się do odpowiednich indeksów (np. $fp(i+1)$), ponieważ pochodną liczymy „krok po kroku”.
6. Wykreślamy przebiegi odpowiednich funkcji.



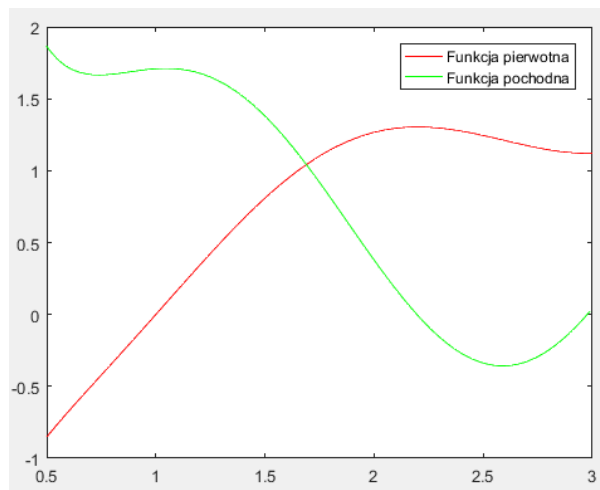
Na rys. 3 przedstawiono kod wyznaczania pochodnej numerycznej dla danego przykładu z wykorzystaniem metody różnicy w przód, a także zamieszczono w nim niezbędne komentarze. Na rys. 4 widoczny jest efekt działania skryptu.

```
clc; clear;
dx = 0.01;      % 1: Określenie kroku liczenia pochodnej
x = 0.5:dx:3;  % 2: Generowanie wektora 'x' na podstawie kroku 'dx'
y = log(x).*((sin(x).^2)+1); % 3: Wyznaczanie wartości funkcji 'y'

N = length(x); % 4: Określenie liczby przejść pętli (liczenia pochodnej)
for i = 1:N-1 % 5: Realizacja pętli - obliczanie pochodnej metodą w przód
    fp(i) = (y(i+1)-y(i))/dx;
end

plot(x,y,'r',x(1:end-1),fp,'g') % 6: Wykreślenie funkcji
legend('Funkcja pierwotna', 'Funkcja pochodna')
```

Rys. 3. Wyznaczanie pochodnej.



Rys. 4. Rezultat działania skryptu.

Ważne! Pętle liczymy **N-1** razy!

Dlaczego? Ponieważ zaimplementowany wzór liczy pochodną do przodu, więc jest to zabezpieczenie, aby w ostatnim punkcie funkcji nie wyjść poza jej zakres!

Podobnie, gdy **wykreślamy wykres pochodnej** wartości argumentów definiujemy jako wektor krótszy o jedną wartość wektora: **x(1:end-1)**

W przypadku, gdy do czynienia mamy z danymi zgromadzonymi za pomocą pomiarów (danymi empirycznymi) – postępowanie jest identyczne. Wyjątkiem jest tylko brak wyznaczania wartości funkcji **y**, ponieważ są one określone jako dane z pomiarów. Wszystkie pozostałe czynności wykonujemy analogicznie.



4. Samodzielne rozwiązywanie zadań.

Zadanie 1.

Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $y = x^3 + 4$, gdzie $x \in \langle 10; 25 \rangle$,
- $y = \sin(x)$, gdzie $x \in \langle 0; 8\pi \rangle$,
- $y = e^x$, gdzie $x \in \langle 0; 5 \rangle$.

Zastosuj metodę różnicy w przód. Przedstaw wykresy funkcji oraz ich pochodnych w jednym oknie graficznym, w układzie przedstawionym poniżej. Do wykresów dodaj odpowiednie legendy.

$y = x^3 + 4$ +	$y = \sin(x)$ +	$y = e^x$ +
pochodna	pochodna	pochodna

Zadanie 2.

Wyznacz pochodną funkcji $y = \ln(x + \sqrt{2})$, gdzie $x \in \langle 0; 10 \rangle$. Obliczenia wykonaj dla różnych kroków różniczkowania: $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,5$ oraz $\Delta x = 0,01$. Zastosuj metodę różnicy centralnej. Uzyskane wykresy pochodnych zestaw ze sobą w jednym oknie. Jaka jest zależność pomiędzy krokiem a pochodną?

Zadanie 3.

Oblicz numerycznie pochodną funkcji $\frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$, gdzie $x \in \langle 1,5 \rangle$. Wykorzystaj do tego celu dowolny sposób metody różnic skończonych, a także porównaj go z wbudowaną w pakiecie Matlab funkcją `diff()`, która pozwala obliczać różnice pomiędzy kolejnymi elementami danego wektora.

Zadanie 4.

W czasie 30 sekund dokonano pomiarów przemieszczeń kątowych jednej z osi robota przemysłowego. Wiedząc, że pochodna drogi kątowej po czasie, to prędkość kątowa – wyznacz wykresy prędkości kątowej osi robota, a także jego przyspieszenia kątowego. Przyjmij krok różniczkowania $\Delta x = 1$. Zastosuj metodę różnicy w przód.

Podpowiedź: Czas mierzony był co sekundę i reprezentuje go zmienna $x \in \langle 1; 30 \rangle$ zaś y określony będzie przez dane pomiarowe:

[66.2 63.5 55.2 49.7 49.7 53.9 60.8 63.6 66.4 69.1 70.5 70.6 70.6 69.2 66.5
63.8 63.8 63.8 66.6 68 72.2 72.2 72.2 72.3 72.3 73.7 75.1 75.1 75.2 75.2]

Zadanie 5.

Na podstawie zarejestrowanych przez biegacza informacji dotyczących przebytego dystansu w danym czasie (plik dostępny w materiałach on-line prowadzącego) dokonaj wyznaczenia wykresu zmian prędkości w konkretnych punktach i dokonaj oceny intensywności treningu.



5. Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadań.

Rozwiązanie zadań należy zgłosić osobie prowadzącej zajęcia, a następnie omówić uzyskane rezultaty.