POLITECHNIKA LUBELSKA
WYDZIAŁ MECHANICZNY
KATEDRA INFORMATYZACJI I ROBOTYZACJI PRODUKCJI

Nr ćwiczenia:	**12**
Tytuł ćwiczenia:	***Aproksymacja i interpolacja.***
Nazwa przedmiotu:	Podstawy Metod Obliczeniowych
Kierunek studiów:	Robotyzacja Procesów Wytwórczych – I stopień

1. Cel ćwiczenia:

- zapoznanie z metodami aproksymacji oraz interpolacji realizowanymi w środowisku Matlab,
- praktyczne wykorzystanie poznanych metod.

2. Urządzenia i oprogramowanie niezbędne do realizacji ćwiczenia:

- stanowisko komputerowe z oprogramowaniem Matlab i dostępem do Internetu.

3. Przebieg ćwiczenia:

1. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia.
2. Samodzielne rozwiązywanie zadań.
3. Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadań.

4. Literatura:

1. Klempka R., Świątek B., Garbacz-Klempka A.: *Programowanie, algorytmy numeryczne i modelowanie w Matlabie.* Wyd. AGH 2017.
2. Magrab E. B., Azarm S., Balachandran B., Duncan J., Herold K., Walsh K.: *Engineers Guide to MATLAB.* Wyd. Pearson, 2011.
3. Brunos P.: *Aproksymacja, interpolacja, ekstrapolacja*. Oprogramowanie Naukowo-Techniczne – Blog MATLAB&Simulink.
4. Pratap R.: *Matlab 7 dla naukowców i inżynierów*. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2006.
5. Kamińska A., Pińczyk B.: *Ćwiczenia z Matlab. Przykłady i zadania*. Wyd. MIKOM, Warszawa 2002.

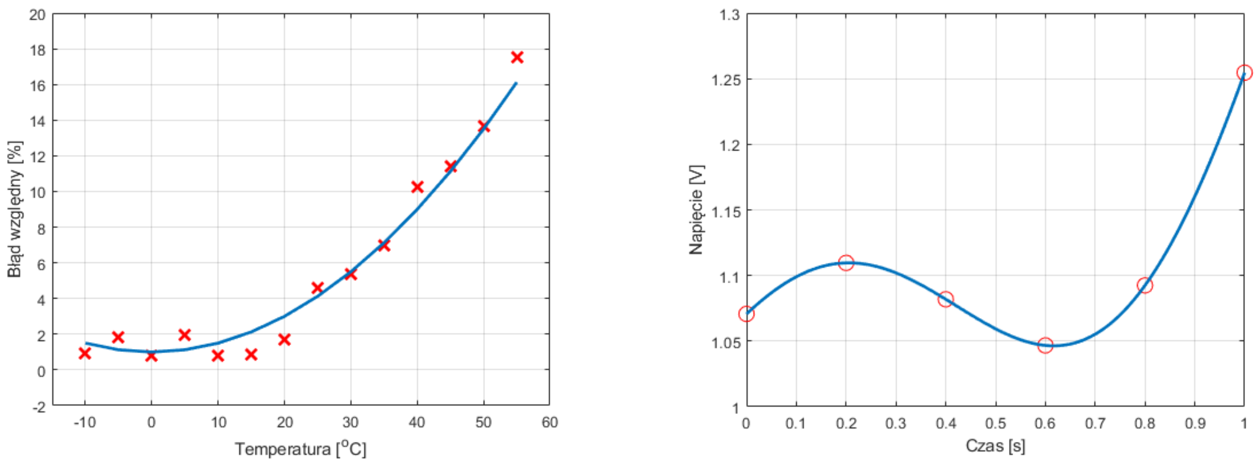
---

1. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia.

W obszarze analizy danych dotyczących różnorodnych procesów i zjawisk bardzo często zdarza się sytuacja, gdy znane są jedynie wartości funkcji w pewnych punktach (np. odczyty pewnych wartości z pomiaru) i wówczas nie znamy dokładnej postaci funkcji wyrażającej analizowane zależności. Z kolei podczas realizacji różnorodnych obliczeń może zdarzyć się, że obliczenie wartości pewnej funkcji bezpośrednio z określającego ją wzoru nastręcza zbyt dużych trudności rachunkowych i konieczne jest przybliżenie jej za pomocą innej (prostszej) funkcji. Wówczas pomocnymi narzędziami stosowanymi do rozwiązywania tego typu problemów jest aproksymacja oraz interpolacja funkcji (rys. 1).

Aproksymacja polega na wykonaniu przybliżenia jednej funkcji za pomocą drugiej – tzw. funkcji aproksymującej. Najczęściej takie rozwiązanie stosowane jest dla funkcji o skomplikowanym zapisie analitycznym, w celu przedstawienia funkcji w prostszej postaci. Proces ten rozpoczyna się od znalezienia węzłów aproksymacji, czyli punktów, które w sposób przybliżony lub dokładny definiują przebieg aproksymowanej zależności $y = f(x)$. Następnie zależność tą zapisuje się za pomocą innej zależności, dla której znany jest opis analityczny. To pozwala, aby dla dowolnej wartości x (a nie jedynie w punktach węzłowych) wyznaczać można wartości funkcji y. Krzywa aproksymacji nie przechodzi idealnie przez wszystkie punkty, ale odzwierciedla trend w danych.

Interpolacja polega na wyznaczeniu tzw. funkcji interpolującej, czyli takiej, która przechodzi przez wszystkie zadane punkty (węzłami) w danym przedziale. Należy pamiętać, że dla n punktów pomiarowych można dopasować wielomian rzędu $n-1$. Interpolacja różni się od aproksymacji tym, że krzywa interpolacji przechodzi przez każdy punkt węzłowy. Interpolacja będzie więc szczególnym przypadkiem aproksymacji.



Rys. 1. Przykłady metod przybliżania danych: aproksymacja (po lewej) oraz interpolacja (po prawej)

2. Aproksymacja

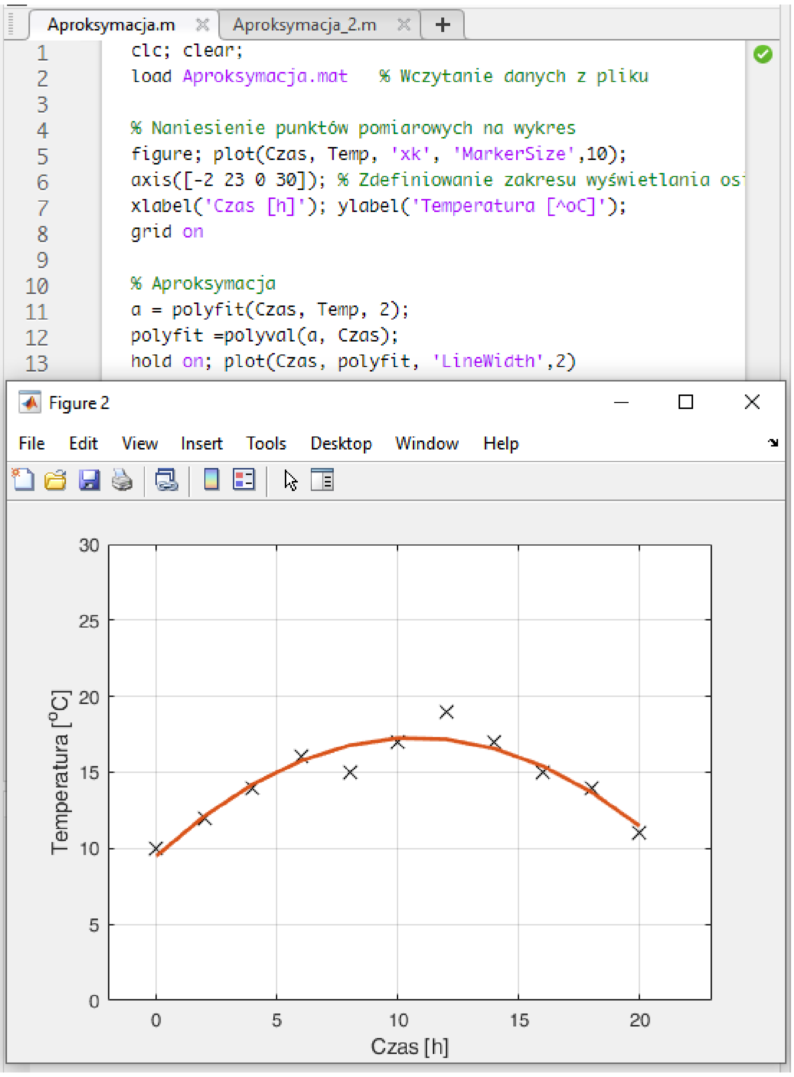
Celem przeprowadzania aproksymacji jest znalezienie modelu matematycznego, który będzie reprezentatywny dla danego zbioru danych, czyli będzie odzwierciedlał ogólny trend zmian kolejnych wartości funkcji.

Matlab posiada wbudowane funkcje służące do realizacji aproksymacji. W tym zakresie wykorzystuje się polecenia:

`a = polyfit(x,y,k)`	znajdujące wartości współczynników wielomianu aproksymującego a dla punktów węzłowych określonych wektorami x i y; zmienna k oznacza stopień wielomianu algebraicznego.
`yy = polyval(a,x)`	obliczające wartość wielomianu dla dowolnego argumentu x.

Przykład: Wykorzystując pakiet Matlab przeprowadzić aproksymację danych pochodzących z pomiaru temperatury powietrza, który wykonywany był co 2 godziny, przez okres 20 godzin.

Pierwszym krokiem skryptu jest wykreślenie na wykresie punktów ilustrujących uzyskane wyniki pomiarów. Po odpowiednim przygotowaniu i opisaniu wykresu, wykorzystując polecenia `polyfit` oraz `polyval` zrealizowano proces aproksymacji, a także (z wykorzystaniem polecenia `hold on`) wykreślono krzywą będącą modelem przybliżającym położenie kolejnych punktów pomiarowych. Skrypt oraz jego działanie przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Przebieg aproksymacji zmian temperatury w czasie.

3. Interpolacja

Celem interpolacji jest znalezienie modelu matematycznego, którym będzie pewna krzywa przechodząca przez wszystkie punkty pomiarowe, nazywane węzłami.

Matlab, podobnie jak w przypadku aproksymacji, posiada również wbudowane polecenie umożliwiające przeprowadzenie interpolacji:

```
yy = interp1(xw, yw, xx, 'metoda')
```

Węzły interpolacji zdefiniowane z wykorzystaniem wektorów *xw* oraz *yw*. Parametr *xx* to wektor argumentów (zbiór wartości x dla jakich ma być realizowana interpolacja), zaś a parametr *'metoda'* pozwala na wybranie metody interpolacji. Dostępne są cztery metody interpolacji:

- `'nearest'` – interpolacja rzędu zerowego – funkcją schodkową,
- `'linear'` – interpolacja liniowa,
- `'cubic'` – interpolacja wielomianem trzeciego stopnia,
- `'spline'` – metoda interpolacji funkcjami sklejanymi (pozwala na uzyskanie gładkiego kształtu funkcji interpolującej).

Przykład: Wykorzystując pakiet Matlab przeprowadzić interpolację danych pochodzących z pomiaru temperatury powietrza, który wykonywany był co 2 godziny, przez okres 20 godzin.

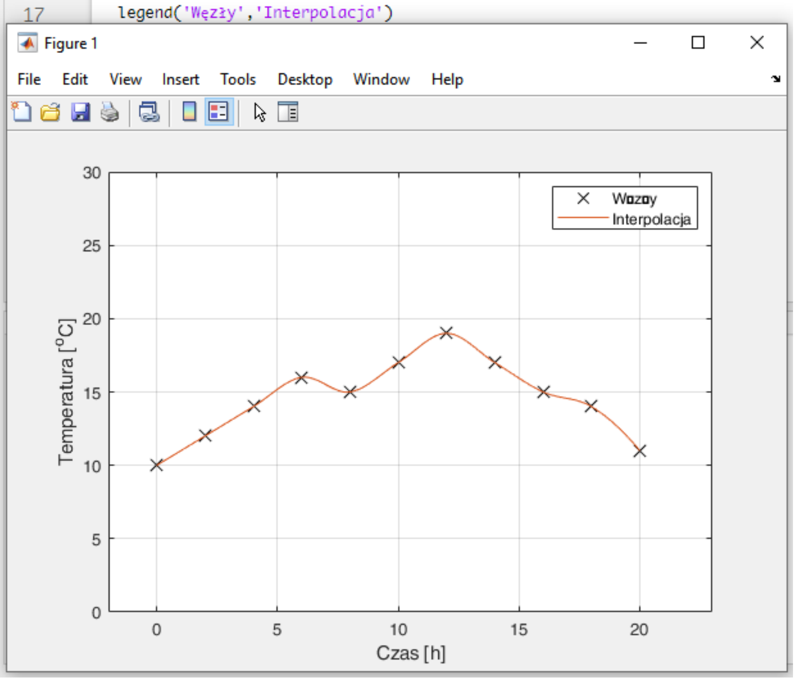
Pierwszym krokiem, jeszcze przed przeprowadzeniem interpolacji było wykonanie wykresu, na którym zaznaczono wszystkie uzyskane wyniki pomiarów. Po odpowiednim przygotowaniu i opisaniu wykresu, utworzono nowy wektor *xx*, który ma więcej elementów niż dane pomiarowe, ponieważ uzyskujemy w ten sposób możliwość obliczenia wartości funkcji między węzłami. Następnie wywołując polecenie *interp1*, przeprowadzono interpolację danych pomiarowych za pomocą wielomianu trzeciego stopnia. Skrypt oraz jego działanie przedstawiono na rysunku 2.

Interpolacja.m

```
clc; clear;
load Aproksymacja_i_interpolacja.mat   % Wczytanie danych z pliku

% Naniesienie punktów pomiarowych na wykres
figure; plot(Czas, Temp, 'xk', 'MarkerSize',10);
axis([-2 23 0 30]); % Zdefiniowanie zakresu wyświetlania osi układu;
xlabel('Czas [h]'); ylabel('Temperatura [^oC]');
grid on

% Interpolacja
xx = (0:0.1:20); %nowy wektor, dla którego obliczane będą
% wartości funkcji interpolującej
yy = interp1(Czas, Temp, xx, 'cubic');
figure(1);
hold on
plot(xx,yy);
legend('Węzły','Interpolacja')
```



Rys. 3. Przebieg interpolacji wyników pomiaru temperatury w czasie.

4. Samodzielne rozwiązywanie zadań.

Zadanie 1

Punkty pewnej funkcji opisane są zależnością $y = \sin(x)\cos(x)\, e^{0.1x}$ dla $x = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Przeprowadź interpolację tej funkcji i wykreśl wraz z węzłami przebieg funkcji interpolującej.

Zadanie 2

Punkty pewnej funkcji opisane są zależnością $y = \frac{x^3 - x^2}{10x}$ dla $x = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Przeprowadź interpolację tej funkcji z wykorzystaniem wszystkich czterech metod dostępnych w pakiecie Matlab. Wykresy umieść w jednym oknie w układzie 2×2.

Zadanie 3

Przeprowadź aproksymację funkcji $y = \sin(0.1x)\cos(0.5x)$ dla $x = \{0,1,2,\dots,15\}$. Sprawdź wpływ parametru *k* na uzyskane przebiegi funkcji aproksymującej.

Zadanie 4

Dla rakiety balistycznej dokonano pomiarów prędkości w wybranych punktach czasu. Wyniki przedstawiono w tabeli 1. Wykorzystując pakiet Matlab opracuj tabelę w której podane będą prędkości rakiety dla czasu *t* = 12 [s], *t* = 18 [s] oraz *t* = 25 [s].

Tab. 1. Zarejestrowane wyniki pomiarów.

Czas – *t* [s]	0	10	15	20	22,5	30
Prędkość – *V* [m/s]	0	227,04	362,78	517,35	602,97	901,67

Zadanie 5

Przeprowadź aproksymację średniej tygodniowej liczby zachorowań na COVID-19, z dowolnych, kolejnych 10 tygodni roku 2021.

5. Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadań.

Rozwiązanie zadań należy zgłosić osobie prowadzącej zajęcia, a następnie omówić uzyskane rezultaty.