Nr ćwiczenia:	**10**
Tytuł ćwiczenia:	***Całkowanie numeryczne.***
Nazwa przedmiotu:	Podstawy Metod Obliczeniowych
Kierunek studiów:	Robotyzacja Procesów Wytwórczych – I stopień

1. Cel ćwiczenia:

- zdobycie umiejętności realizacji numerycznego obliczania pochodnych,
- praktyczne wykorzystanie poznanych elementów środowiska Matlab.

2. Urządzenia i oprogramowanie niezbędne do realizacji ćwiczenia:

- stanowisko komputerowe z oprogramowaniem Matlab i dostępem do Internetu.

3. Przebieg ćwiczenia:

1. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia.
2. Samodzielne rozwiązywanie zadań.
3. Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadań.

4. Literatura:

1. Klempka R., Świątek B., Garbacz-Klempka A.: *Programowanie, algorytmy numeryczne i modelowanie w Matlabie*. Wyd. AGH, 2017.
2. Magrab E. B., Azarm S., Balachandran B., Duncan J., Herold K., Walsh G.: *Engineers Guide to MATLAB*. Pearson, 2011.
3. Pratap R.: *Matlab 7 dla naukowców i inżynierów*. Wyd. Naukowe PWN, 2006.
4. Kamińska A., Pińczyk B.: *Ćwiczenia z Matlab. Przykłady i zadania*. Wyd. MIKOM, 2002.

---

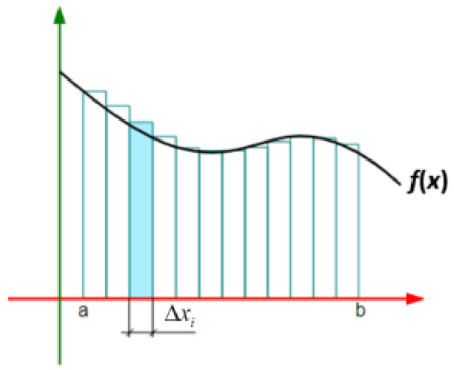
1. Wprowadzenie do tematyki ćwiczenia.

Niniejsze zajęcia stanowią drugą część praktycznego wykorzystania poznanych elementów środowiska Matlab do realizacji wybranych metod numerycznych, a dokładnie całkowania numerycznego. Całkowanie przebiega w podobny sposób jak różniczkowanie, jednak należy pamiętać o implementacji odpowiednich wzorów w obszarze pętli, które umożliwiają iteracyjne wykonywanie obliczeń.

2. Numeryczne metody obliczania całek.

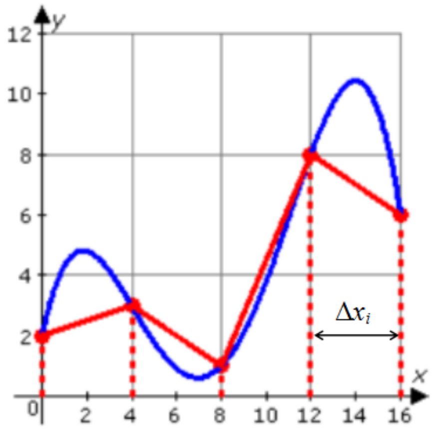
Do łatwych w implementacji oraz najczęściej stosowanych metod całkowania numerycznego zalicza się metodę prostokątów oraz metodę trapezów (rys. 1). Idea każdej z metod – jak zostało powiedziane na wykładzie – jest niezwykle prosta. Wykres funkcji dla której chcemy przeprowadzić całkowanie zostaje podzielony na odpowiednie „kawałki" (w postaci prostokątów lub trapezów), po czym z określoną liczbą przejść (iteracji) obliczane zostają pola tychże „kawałeczków”. Oczywiście musimy pamiętać, iż całka to pole pod krzywą wykresu, a więc dodatkowo – obliczone pola zostają ze sobą sumowane.

METODA PROSTOKĄTÓW



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

METODA TRAPEZÓW



$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \left(f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i)\right)$$

Rys. 1. Różnica pomiędzy metodą prostokątów a metodą kwadratów.

W celu przystępnej implementacji tych metod – wzory przedstawione na rys. 1 przyjmują odpowiednią postać arytmetyczną. Przedstawienie ich w odpowiedniej formie ułatwia ich implementację do środowiska komputerowego.

3. Obliczanie całki w środowisku Matlab.

Obliczanie numeryczne całek będzie bardzo podobne do obliczania pochodnej. Dlaczego? Znów musimy wskazać krok całkowania, wykonywać obliczenia pewną ilość razy, a co za tym idzie – zastosować pętlę. W celu zrozumienia tego zagadnienia – przeanalizujmy pewien przykład:

Należy obliczyć całkę:

$$\int \frac{\mathbf{2sin(1,5}\boldsymbol{x}\mathbf{)}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}} - \mathbf{0,3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{dx}$$

gdzie $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{0};\ \mathbf{5} \rangle$.

Algorytm całkowania numerycznego będzie wówczas następujący:

1. Definiujemy krok $\boldsymbol{\Delta x}$ (zobacz – rys. 1) z jakim będziemy obliczać całkę. Jego wartość będzie przechowywana w zmiennej $\mathbf{h}$ (celowo – dla odróżnienia od obliczeń pochodnej).
2. Z wykorzystaniem kroku $\mathbf{h}$ generujemy wektor $\mathbf{x}$ w wymaganym zakresie.
3. Obliczamy wartości funkcji $\mathbf{y}$.

4. Za pomocą zmiennej **`N`** określamy ile elementów („kawałków") musimy policzyć – zazwyczaj będzie to tyle razy, ile elementów zawiera wektor **`x`**.
5. Tworzymy zmienną **`cf`**, która będzie gromadzić sumy obliczanych kolejno pól (prostokątów lub trapezów). Zatem będzie to nasza całka!
6. Z wykorzystaniem pętli implementujemy odpowiedni wzór (metody prostokątów lub trapezów), obliczając i dodając poszczególne pola do nowej zmiennej **`cf`** (sumując je). W pętli musimy odnosić się do odpowiednich indeksów (np. **`y(i+1)`**), ponieważ całkę liczymy „kawałek po kawałku".
7. Wykreślamy przebieg funkcji oraz wartość jej całki.

Na rys. 2 przedstawiono kod numerycznego całkowania dla danego przykładu z wykorzystaniem metody trapezów, a także zamieszczono w nim niezbędne komentarze.

```
clc; clear;
h = 0.01;   % 1: Określenie kroku całkowania
x = 0:h:5;  % 2: Generowanie wektora 'x' na podstwie kroku 'h'
y = ((2*sin(1.5*x))./(x+2)) - 0.3*x.^2;  % 3: Wyznaczanie wartości funkcji 'y'

N = length(x);  % 4: Określenie liczby przejść pętli (liczby prostokątów/trapezów)
cf = 0;         % 5: Tworzenie zmiennej do przechowania wartości całki
for i = 1:N-1   % 6: Realizacja pętli

    cf = cf + (0.5*(y(i+1)+y(i)))*h; % 6: Obliczanie całki metodą trapezów

end
plot(x,y) % 7: Wykreślenie funkcji
fprintf('Wyznaczona całka wynosi: %g\n',cf) % 7: Wyświetlenie wartości całki
```

Rys. 2. Obliczanie analizowanej całki.

Ważne! Pętle liczymy **`N-1`** razy!

Dlaczego? W obliczeniu całki również nie możemy wyjść poza jej zakres!

Zwróćmy uwagę jak realizowane jest sumowanie elementów (symbol $\boxed{\sum_{i=1}^{N}}$ we wzorach metod).

Zastosowanie znajduje tutaj procedura tzw. zwiększania wartości zmiennej. Zmienna **`cf`** ma w każdym przejściu pętli wartość taką jak poprzednio **plus** wartość kolejnego trapezu. Gdybyśmy chcieli zastosować metodę prostokątów – wówczas w pętli znalazłby się wzór:

```
cf = cf + y(i)*h;
```

Podsumowanie implementacji wzorów znajduje się na rys. 3.

METODA PROSTOKĄTÓW

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \underline{f(x_i)\Delta x_i}$$

```
cf = cf + y(i)*h
```

METODA TRAPEZÓW

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N} \underline{\Delta x_i \left(f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i)\right)}$$

```
cf = cf + (0.5*(y(i+1)+y(i)))*h
```

Rys. 3. Idea implementacji wzorów.

4. Samodzielne rozwiązywanie zadań.

Zadanie 1

Oblicz numerycznie następujące całki:

- $\int (x^2 + \frac{4}{3})\, dx$, gdzie $x \in \langle 0; 10 \rangle$,
- $\int \cos\left(x + \sqrt{x}\right) dx$, gdzie $x \in \langle 0; \frac{4}{5}\pi \rangle$,
- $\int \ln(1{,}5x) \sin(x) dx$, gdzie $x \in \langle 1; 4 \rangle$

Zastosuj metodę prostokątów przyjmując krok całkowania 0,05.

Zadanie 2

Oblicz numerycznie całkę $\int 2\sin(\mathrm{x})\, |\cos(\mathrm{x})| dx$, gdzie $x \in \langle 0; \pi \rangle$. Obliczenia wykonaj dla różnych kroków całkowania: $\Delta x = 0{,}5$ oraz $\Delta x = 0{,}02$ z wykorzystaniem metody prostokątów i trapezów. Zestaw ze sobą otrzymane dane oraz wykreśl wykres funkcji. Jakie nasuwają się wnioski?

Zadanie 3

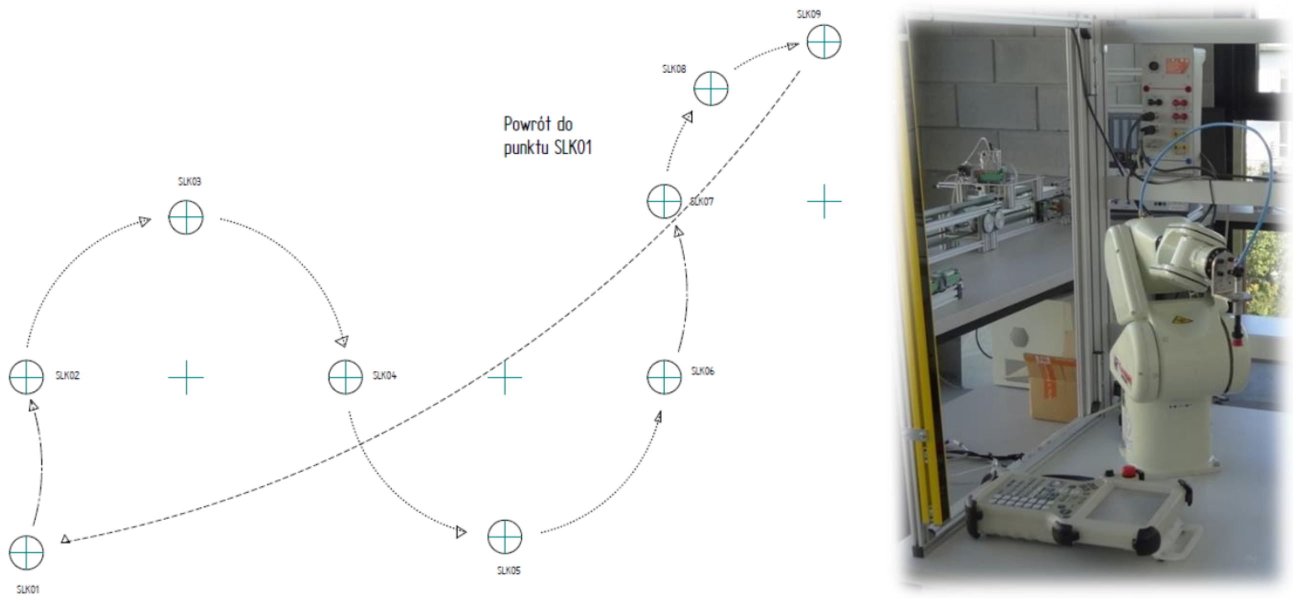
Oblicz pole pod krzywą opisaną za pomocą funkcji $\frac{12}{4.6}\ln(x)$, gdzie $x \in \langle 2; 8 \rangle$.

Zadanie 4

Oblicz pole pod krzywą opisaną za pomocą funkcji $e^{\frac{x}{2}}(\sin(x) - 1$ gdzie $x \in \langle -\sqrt{3} + 1; +\sqrt{3} + 1 \rangle$.

Zadanie 5

Dla robota przemysłowego Kawasaki RS003N dokonano pomiarów wartości chwilowych napięcia oraz natężenia prądu elektrycznego podczas pokonywania zdefiniowanej ścieżki (rys. 4). Uzyskane wyniki pomiarów zgromadzono w tabeli 1.



Rys. 4. Trajektoria efektora robota.

Tab. 1. Wyniki pomiarów.

			Napięcie chwilowe $u(t)$		Natężenie chwilowe $i(t)$	
Nr	**Czas**	**Jednostka**	**Wartość**	**Jednostka**	**Wartość**	**Jednostka**
1	0	ms	232,2	V	0,58	A
2	500	ms	231,9	V	0,58	A
3	1000	ms	231,5	V	1,05	A
4	1500	ms	231,6	V	2,22	A
5	2000	ms	231,6	V	1,75	A
6	2500	ms	231,7	V	1,44	A
7	3000	ms	231,8	V	1,44	A
8	3500	ms	231,6	V	1,59	A
9	4000	ms	231,6	V	1,37	A
10	4500	ms	231,5	V	2,05	A
11	5000	ms	231,4	V	1,60	A
12	5500	ms	231,3	V	1,60	A
13	6000	ms	231,4	V	1,60	A
14	6500	ms	231,4	V	1,45	A
15	7000	ms	231,5	V	1,44	A
16	7500	ms	231,8	V	1,86	A
17	8000	ms	232,2	V	1,54	A
18	8500	ms	232,1	V	1,53	A
19	9000	ms	232,1	V	1,53	A
20	9500	ms	232,1	V	1,34	A
21	10000	ms	232,0	V	1,10	A
22	10500	ms	231,9	V	0,99	A
23	11000	ms	231,9	V	0,85	A
24	11500	ms	231,9	V	0,74	A
25	12000	ms	232,0	V	0,63	A
26	12500	ms	232,0	V	0,62	A

Wiedząc, że moc czynna jest średnią mocą, którą dla przebiegu okresowego prądu i napięcia wyraża całka Riemanna:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

gdzie: P – moc czynna,
t – czas,
T – okres,
$u(t)$ – napięcie chwilowe,
$i(t)$ – natężenie prądu chwilowe,

wyznacz moc czynną robota bazując na zarejestrowanych pomiarach.

5. Sprawdzenie poprawności rozwiązania zadań.

Rozwiązanie zadań należy zgłosić osobie prowadzącej zajęcia, a następnie omówić uzyskane rezultaty.